

# ارائه یک رهیافت المان‌های محدود لاگرانژ الحاقی در تحلیل تریبولوژیکی تماس اصطکاکی در سامانه‌های ویسکوالاستیک

حسین اشرفی، مهرداد فرید و مهدی کسرای

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

## چکیده

چگونگی توزیع اصطکاک و فشار تماسی در برهمکنش سامانه‌های مکانیکی دارای نقش کلیدی بر منظر تریبولوژیکی (*tribological*) این سامانه‌ها می‌باشد. تماس در پیکره‌های تغییرشکل پذیر به طور کلی یک پدیده غیرخطی و در پیکره‌های ویسکوالاستیک نیز یک پدیده وابسته به زمان می‌باشد. معرفی پدیده اصطکاک به عنوان یک پارامتر بازگشت ناپذیر در سطح میانجی سامانه‌های برهمکنشی، مساله تماس را از نظر فرمول‌بندی محاسباتی پیچیده‌تر نیز می‌سازد. در این پژوهش به توسعه یک فرمول‌بندی المان‌های محدود کلی بر اساس یک رهیافت بهینه‌سازی لاگرانژ الحاقی (*augmented Lagrangian optimization*) به منظور تحلیل رفتار تماس اصطکاکی در سطوح سامانه‌های ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. بر اساس شرایط سینماتیکی و هندسی اجزای در حال تماس یک رهیافت لاگرانژ الحاقی بهبود یافته از مکانیک تماس محاسباتی اجرا شده است. به منظور فرمول‌بندی معادلات متشکله سامانه‌های ویسکوالاستیک نیز از یک مدل ماکسول تعمیم‌یافته در قالب دو تابع وارهدگی کلی در شرایط اتساع و برش (*shear and dilatation relaxation*) بهره گرفته شده است. سپس با استفاده از اعمال اصل کار مجازی، یک فرمول‌بندی مؤثر المان‌های محدود با یک فرآیند وارهدگی نموی در معادلات متشکله و در برگزیده قیود تماس حاصل شده است. یک مثال عددی به منظور ارزیابی فرمول‌بندی ارائه شده در انتها ارایه شده است.

واژه های کلیدی: تماس ویسکوالاستیک، بهینه‌سازی لاگرانژ الحاقی، تریبولوژی، وارهدگی نموی.

## An augmented lagrangian finite element approach for the tribological analysis of frictional contact problems in viscoelastic systems

H. Ashrafi, M. Farid and M. Kasraei

Department of Mechanical Engineering, Shiraz University

### Abstract

The tribological aspects of contact systems are greatly affected by the friction and contact pressure distribution throughout the surface of the contact interface. Generally the contact of deformable bodies is a nonlinear problem and for the viscoelastic bodies it has a time-dependent response, since their viscous characteristics depends on time. The introduction of friction with its irreversible characteristic in contact surface makes the contact problem more difficult. The objective of this study is to develop a general augmented Lagrangian finite element formulation associated with an incremental adaptive procedure which established for analysis of frictional contact problems in viscoelastic systems. The contact behavior has been studied through an improved augmented Lagrangian approach. A generalized Maxwell model has been used to model the viscoelastic constitutive equations in which bulk and shear relaxation functions are represented by the sum of a series of decaying exponential functions of time. Based on the principle of virtual work, an effective finite element formulation associated with an incremental relaxation procedure has been developed. As an application of formulation, the numerical example has been presented to evaluate the numerical approach.

**Keywords:** viscoelastic contact problems, The augmented lagrangian optimization approach, Tribology, Incremental relaxation

**E-mail of corresponding author:** ashrafi@shirazu.ac.ir

## مقدمه

مسائل مقدار مرزی در برگیرنده تماس و اصطکاک، یکی از با اهمیت ترین مسائل در صنایع وابسته به مهندسی تریبولوژی و همچنین در کاربردهای علوم فضایی و نظامی، علوم پزشکی، بیولوژی و محیط زیست می‌باشند [۱-۲]. در واقع، تمام حرکات در این کره خاکی از قبیل قدم زدن ساده یک عابر یا دویدن او، به حرکت در آمدن یک دوچرخه یا حرکت اتومبیل‌ها، ترن‌ها، کشتی‌ها، خودروهای نظامی و سایر مصنوعات متحرک بشر همگی شامل تماس و اصطکاک می‌باشند. بنابراین اغلب سیستم‌های فیزیکی برای انجام یک تحلیل عددی موفق، نیاز به توصیف کامل برهمکنش‌های مکانیکی در نواحی مشترک تماسی خود دارند. در این برهمکنش‌های تماسی بسته به نوع کاربرد سیستم فیزیکی ممکن است رفتار اصطکاکی، برهمکنش گذرای نواحی مشترک، کوپلینگ ترمومکانیکی، برهمکنش با روانسازها و یا لایه‌های سیال میانجی و آسیب‌های سایشی نواحی مشترک نیز مورد تحلیل قرار گیرند. در گذشته اغلب در فرآیندهای طراحی، مسایل مرتبط با مکانیک تماس به دلیل طبیعت غیرخطی با فرضیات خاصی به صورت تقریبی حل می‌شدند. امروزه با گسترش سریع تکنولوژی کامپیوترهای مدرن، می‌توان با بکارگیری ابزاری به نام مکانیک محاسباتی، مکانیسم‌های تماس را به شیوه عددی شبیه‌سازی نمود. این شبیه‌سازی‌ها با دقتی که برای اهداف طراحی کافی است، قادر به انجام می‌باشند. با این وجود حتی در شرایط کنونی نیز نرم افزارهای استاندارد المان‌های محدود به صورت کامل قادر به حل مسایل تماسی اصطکاکی با الگوریتم‌هایی توانمند نمی‌باشند. این بدین دلیل است که در انجمن المان‌های محدود هنوز رقابت به منظور طراحی بهینه و بکارگیری روش‌هایی توانمند در مکانیک تماس محاسباتی وجود دارد. همچنین در پی گسترش کاربرد جامدات ویسکوالاستیک به خصوص کامپوزیت‌ها و جامدات پلیمری در طراحی سامانه‌های مهندسی، تحلیل مسایل تماسی ویسکوالاستیک در برگیرنده اصطکاک نیز از اهمیت

تریبولوژیکی ویژه‌ای برخوردار گردیده است. مکانیک تماس محاسباتی روی هم رفته باید مباحث اساسی علم تریبولوژی از قبیل اصطکاک، روغنکاری، چسبندگی، سایش و خوردگی را تحت پوشش مطالعاتی خود قرار دهد [۱-۲]. به طور کلی، نحوه توزیع تنش‌های تماسی در نواحی مشترک تماسی دو جسم تغییرشکل پذیر نقش بسیار کلیدی را در نمود تریبولوژیکی سیستم‌های تماسی دارد. بایستی توجه داشت که در اکثر موارد، اجسام در حال تماس در یک سطح تماس ثابت باقی نمی‌مانند و در حقیقت تنش‌های تماسی اغلب به صورت سیکنی در یک زمان طولانی تکرار می‌شوند که این مساله اغلب در یک ناحیه متناسب با تنش‌های موضعی به ترک موضعی منجر می‌شود. وضعیت تنش‌های تماسی در سامانه‌های ویسکوالاستیک هم تحت تأثیر خواص الاستیک و هم خواص ویسکوز می‌باشند. از این رو پیکربندی کلی تماس ویسکوالاستیک، ناحیه مشترک تماسی و نحوه توزیع تنش‌های تماسی همگی وابسته به زمان می‌باشند. در نتیجه هنگامی که حداقل یکی از پیکره‌های تماسی، رفتار ویسکوالاستیک از خود نشان دهد با فرمول‌بندی یک الگوریتم غیرخطی وابسته به زمان مواجه می‌شویم. از دیرباز به علت میزان اهمیتی که در گفتار پیشین بیان شد، تعداد قابل توجهی از پژوهشگران به پژوهش در زمینه مسایل تماسی مشغول بوده‌اند. ریشه‌های تحقیق بر روی پدیده‌های در برگیرنده تماس به قرن هجدهم میلادی بر می‌گردد. در طی این مدت، پیکره‌های تماسی برای ساده‌سازی به صورت صلب در نظر گرفته می‌شدند که قدرت به پیش‌گویی تنش‌ها و تغییر شکل‌های داخل پیکره‌ها را نداشتند. مطالعات تحلیلی کلاسیک در علم مکانیک تماس در سال ۱۸۸۲ میلادی با انتشار مقاله‌ای با عنوان "تماس جامدات الاستیک" توسط هرترز آغاز می‌شود [۳]. لی و رادوک [۴] نیز در نخستین مرتبه با استفاده از راه حل تماس الاستیک هرترز و روش تبدیل لاپلاس، تماس یک کره صلب هموار را تحت فشار بر روی یک نیم‌فضای ویسکوالاستیک مورد مطالعه قرار دادند. توسعه روش‌های

تغییراتی برای بهنگام‌سازی اتوماتیک مقادیر پنالته ارایه دادند. چانگ و چن [۱۱] بر اساس اصل کار مجازی یک مدل المان‌های محدود دو بعدی را با استفاده از یک فرآیند نموی در معادلات متشکله ویسکوالاستیک و معادلات گرمایی برای تحلیل مسائل تماسی ترمو ویسکوالاستیک ارایه کردند. شیلور و سوفونی [۱۲] بر اساس فرم غیرموضعی قانون اصطکاک کولمب، یک فرمول‌بندی تغییراتی ضعیف را برای مساله تماس اصطکاکی دوسویه بین یک پیکره ویسکوالاستیک کلونینی با یک مانع صلب ارائه کردند. گیری و همکارانش [۱۳] تماس دینامیکی فیلم‌های پلاستیکی را در شرایط چسبندگی ویسکوالاستیک بررسی نمودند. آماساد و فابر [۱۴] هم مساله تماسی تک سویه بین یک پیکره ویسکو الاستیک با یک بستر صلب را با در نظر گرفتن قانون اصطکاک کولمب تحلیل کردند. محمود و همکارانش یک فرمول‌بندی المان‌های محدود نموی را برای تحلیل مسایل تماسی ویسکو الاستیک بدون در نظر گرفتن [۱۵] و با در نظر گرفتن [۱۶] اصطکاک ارایه نمودند که به منظور مدل‌سازی معادلات متشکله ویسکوالاستیک از مدل ویچرت استفاده کردند و برای اجرای قیود تماسی نیز از روش ضریب لاگراژ بهره گرفتند. اشرفی [۱۷] نیز فرآیند نموسازی متفاوتی را در انتگرال گیری انتگرال‌های استیلجس معادلات متشکله در وارهدگی اتساعی و برشی به کمک روش‌های نقطه میانی و دوزنقه‌ای و استفاده از توابع واحد و دلتا و ارایه کردند و برای اجرای قیود تماسی هم از رهیافت لاگراژ الحاقی بهره بردند. در کار حاضر بر اساس شرایط سینماتیکی و هندسی سامانه‌های ویسکوالاستیک در حال تماس از رهیافت بهینه‌سازی جدیدی بر مبنای روش لاگراژ الحاقی استفاده می‌گردد. این فرآیند حل جدید بر سختی‌های تعیین دو پارامتر پنالته و تعداد گام‌های بار نموی که در روش‌های مرسوم بهینه‌سازی بایستی توسط کاربر تعیین می‌شدند، غلبه می‌کند. این پارامترها در فرآیندهای حل مرسوم به نوع کاربرد مساله تماسی وابسته می‌باشند و از عملیات سعی و خطا بایستی برای رسیدن به همگرایی استفاده نمود.

عددی از جمله روش المان‌های محدود همگام با افزایش تکنولوژی رایانه‌های نوین اتفاق افتاد. به طور کلی دو نوع فرمول‌بندی اصلی برای حل مسایل تماسی در منابع مورد بررسی قرار گرفته است: فرمول‌بندی‌های نامساوی تغییراتی و تساوی تغییراتی که از اصل کار مجازی منتج می‌شوند [۱]. فرمول‌بندی‌های نوع اول از نامساوی‌های تغییراتی که در واقع بیانگر اصل کار مجازی به شکل نامساوی می‌باشند، استفاده می‌کنند. در آن‌ها تمام شرایط مرزی شامل شرایط تماسی و اصطکاکی فقط در قالب یک رابطه نامساوی تغییراتی بیان می‌شود. ادن و کیکوچی [۵] مسایل تماسی بدون اصطکاک را با استفاده از نامساوی تغییراتی فرمول‌بندی کردند و در خصوص وجود و یکتایی حل خود نیز با ارایه مثال‌های عددی بحث نمودند. هنگامی که فرض شود نحوه توزیع نیروی نرمال بر روی رویه تماسی مشخص است، به واسطه نامساوی‌های تغییراتی می‌توان مسایل اصطکاکی را هم تعریف نمود. مسایل تماس اصطکاکی نیز به کمک فرمول‌بندی‌های نامساوی تغییراتی توسط آرت و کرنیر [۶] با استفاده از تحت دیفرانسیل‌ها در قالب مسایل شبه بهینه‌سازی قرار گرفتند. در فرمول‌بندی نوع دوم از تساوی‌های تغییراتی منتجه از اصل کار مجازی استفاده می‌شود که در آن‌ها، رویه تماسی بین دو پیکره در شروع نمو بار به صورت مشخص فرض می‌شود و با تکرار بازسازی می‌شود. سیمو و لارسن [۷] با تساوی تغییراتی برای نخستین مرتبه از رهیافت لاگراژ الحاقی برای تحلیل مسایل تماسی با قابلیت بهنگام‌سازی خودکار ضریب پنالته و ارضای قیود از طریق مقادیر محدود پنالته استفاده نمودند. زاواریس و همکارانش [۸] مسایل تماس اصطکاکی ترمومکانیکی را با رهیافتی مشابه با رهیافت سیمو و لارسن مدل‌سازی و حل نمودند. یک رهیافت لاگراژ الحاقی مشابه با کار سیمو و لارسن برای کاربردهای عملی مهندسی و در عملیات شکل‌دهی فلزات توسط بابا و همکارانش [۹] بکار برده شد. میجار و آرورا [۱۰] با بررسی روش‌های مختلف در تحلیل مسایل تماس اصطکاکی، یک فرآیند حل جدید با فرمول‌بندی تساوی

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3)$$

$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4)$$

به طوری که

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}$$

که در این روابط،  $(G_1)$  و  $(G_2)$  به ترتیب بیانگر توابع مستقل ایزوتروپیک و ارهیدگی متناسب با رفتارهای ذاتی برشی و حجمی یک پیکره‌ی ویسکوالاستیک می‌باشند. معادلات متشکله را در حالت کلی می‌توان به صورت زوج انتگرال‌های هردیتاری فوق نشان داد. یک بازنمایی واقعی به منظور توصیف رفتار متشکله ویسکوالاستیک با آرایش موازی مدل‌های ساده ماکسول در کنار هم به دست می‌آید. توابع ارهیدگی برای این مدل ماکسول تعمیم یافته به صورت مجموع عبارات نمایی کاهش یافته در زمان بیان می‌شوند:

$$G_1(t) = \sum_{p=1}^N A_p \left[ e^{(-a_p t)} \right] \quad (6)$$

$$G_2(t) = \sum_{p=1}^N B_p \left[ e^{(-b_p t)} \right] \quad (7)$$

که  $(N)$  تعداد کل المان‌های ماکسول است و  $(A_p)$  و  $(B_p)$  بیانگر ضرایب متناظر با عکس زمان‌های و ارهیدگی  $(a_p)$  و  $(b_p)$  می‌باشند. به منظور اعمال مستقیم فرمول‌بندی المان‌های محدود به روابط (۳) و (۴) از یک فرآیند نموسازی در معادلات اتساعی و انحرافی بهره گرفته می‌شود. اکنون با فرض دانستن وضعیت تنش در زمان  $(t_n)$  به استخراج وضعیت تنش در زمان فعلی  $(t_{n+1})$  پرداخته می‌شود. با جایگزینی تابع ارهیدگی (۶) در معادله (۳) می‌توان تنش حجمی  $(\sigma_{kk})$  را در  $(t_n)$  به صورت زیر استخراج نمود:

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^{(n)}(x, t_n) &= \int_0^{t_n} \langle G_2(t_n - \tau) \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (8) \\ &= \sum_{p=1}^N \left[ \int_0^{t_n} \langle B_p e^{-b_p(t_n - \tau)} \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \\ &= \sum_{p=1}^N [\sigma_{kkp}^{(n)}] \end{aligned}$$

## توصیف معادلات متشکله در سامانه‌های ویسکوالاستیک

معادلات متشکله که انعکاس دهنده ساختار ذاتی یک ماده خاص می‌باشند، مدل‌های مشخصه مکانیکی متفاوتی از رفتار مواد را مشخص می‌سازند و نقش اساسی را در مطالعات کاربردی مکانیک محیط‌های پیوسته دارا هستند. معادلات متشکله رفتار ویسکوالاستیک به صورت ذاتی نه تنها شامل تنش و کرنش می‌باشند بلکه در برگزیده آهنگ زمانی تغییرات تنش و کرنش نیز خواهند بود [۱۸-۲۰]. رابطه متشکله بین تنش و کرنش در تئوری تغییرشکل‌های کوچک با فرض وابستگی کامل مقدار فعلی تانسور تنش به تاریخچه گذشته مؤلفه‌های تانسور کرنش به شکل زیر بیان می‌شود:

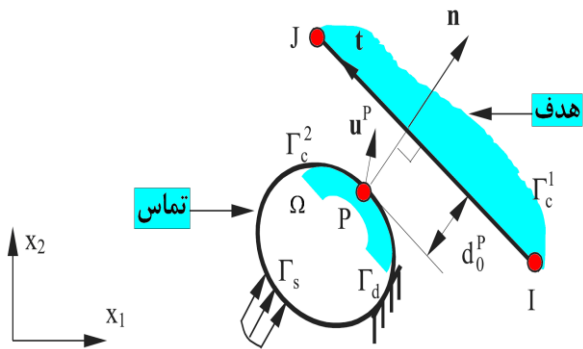
$$\sigma_{ij}(t) = \psi_{ij} \left( \varepsilon_{kl}(t-s), \varepsilon_{kl}(t) \right) \quad (1)$$

که در آن  $(\psi_{ij})$  بیانگر کنشمنند تانسوری می‌باشد که هر تاریخچه کرنش  $(\varepsilon_{ij})$  را به یک تاریخچه تنش متناظر  $(\sigma_{ij})$  تبدیل می‌کند. بطور کلی، تمام متغیرهای میدانی تنها تابع زمان نیستند بلکه تابع موقعیت  $(x_i)$  هم می‌باشند. اگر تاریخچه زمانی کرنش  $(\varepsilon_{ij}(t))$  پیوسته و کنشمنند تانسوری، خطی فرض شوند با استفاده از تئوری بازنمایی ریس می‌توان کنشمنند را به صورت انتگرال استیلجس نوشت و سپس با انتگرال‌گیری جزء به جزء به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2)$$

که توابع انتگرالی  $(G_{ijkl})$  بیانگر خواص ویسکوالاستیک پیکره‌ها در ارهیدگی می‌باشند که بسته به نوع ماده به وسیله آزمایش‌های ارهیدگی تنش تعیین می‌شوند. مطابق اصول مشابهی در الاستیسیته می‌توان مؤلفه‌های برشی و حجمی تنش و کرنش را معرفی نمود و با استفاده از فرم کلی بازنمایی ایزوتروپیک تانسور مرتبه چهارم توابع ارهیدگی، معادلات انتگرالی (۲) را به صورت زیر بازنویسی نمود [۱۹]:

تماسی) و یک پیکره صلب (به عنوان پیکره هدف) مورد نظر قرار می‌گیرد. پیکربندی تماسی سامانه با مختصات مادی  $\mathbf{X}=[x_1, x_2]$  در شکل ۱ نشان داده شده است. پیکره تغییرشکل پذیر یا پیکره تماسی به وسیله دامنه  $\Omega$  و مرز  $\Gamma$  مشخص می‌شود. پیکره تماسی تحت اعمال نیروهای حجمی  $b_i$ ، تراکشن سطحی  $T_i$  بر روی مرز  $\Gamma_s$  و جابجایی مشخص  $\bar{u}_i$  بر روی مرز  $\Gamma_d$  می‌باشد. پیکره تماسی به NOE المان محدود با NON گره گسسته‌سازی می‌شود. در پیکربندی مرجع، گره (P) روی مرز پیکره تماسی با بردار  $\mathbf{X}^P$  و نقاط (I) و (J) روی لبه پیکره هدف با  $\mathbf{X}^I$  و  $\mathbf{X}^J$  قرار می‌گیرند. سیستم مختصات موضعی لبه هدف با بردارهای  $\mathbf{n}$  و  $\mathbf{t}$  نشان داده می‌شود.



شکل ۱. پیکربندی کلی تماسی در یک سامانه مکانیکی کوانتومتری (درصد وزنی)

فاصله نرمال ابتدایی گره تماسی (P) و فاصله نرمال همان گره پس از جابجایی پیکره تماسی در موقعیت فعلی به ترتیب با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{d}_0^P = (\mathbf{X}^J - \mathbf{X}^P) \cdot \mathbf{n} \quad (13)$$

$$\mathbf{d}_n^P = (\mathbf{d}_0^P - \mathbf{u}^P \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{d}_0^P - \mathbf{u}_n^P) \quad (14)$$

که در این رابطه،  $(\mathbf{u}_n^P)$  بیانگر جابجایی نرمال گره (P) می‌باشد. در نتیجه تماس گره (P) بر روی مرز پیکره تماسی با لبه پیکره هدف، نیروی تماسی  $(\mathbf{f}_c^P)$  بر روی پیکره هدف وارد می‌شود که می‌توان آن را به دو مؤلفه تماس نرمال  $(\mathbf{R}_n^P)$  و تماس مماسی  $(\mathbf{f}_t^P)$  در اثر اصطکاک تجزیه نمود. به منظور جلوگیری از نفوذ پیکره‌های در حال تماس در یکدیگر بایستی از قید نفوذ ناپذیری تماس تک

به واسطه استدلال مشابهی هم می‌توان تانسور تنش انحرافی  $(s_{ij})$  را در لحظه  $(t_n)$  بدست آورد. حال به استخراج تانسور تنش حجمی  $(\sigma_{kk})$  برای لحظه زمانی فعلی  $(t_{n+1})$  به صورت زیر می‌توان پرداخت:

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^{(n+1)} &= \sum_{p=1}^N \int_0^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (9) \\ &= \sum_{p=1}^N \left[ \int_0^{t_n} B_p e^{-b_p(t_n-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] e^{-b_p \Delta t} \\ &\quad + \sum_{p=1}^N \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \\ &= \left\{ e^{-b_p(\Delta t)} \right\} \sum_{p=1}^N \sigma_{kkp}^{(n)} \\ &\quad + \left\{ \sum_{p=1}^N \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \right\} \end{aligned}$$

در اینجا به منظور نموسازی معادلات متشکله در بخش دوم رابطه (۹) در  $[t_n, t_{n+1}]$  از قاعده انتگرال‌گیری عددی نقطه میانی که نخستین مرتبه توسط سیمو در حل عددی معادلات انتگرالی وارهیدگی ارایه گردید، استفاده می‌شود [۲۰]. پس از انجام محاسبات عددی، معادله کلی تانسور تنش ویسکوالاستیک  $\sigma_{ij}^{(n+1)}$  در زمان فعلی  $(t_{n+1})$  را به صورت نهایی زیر می‌توان نوشت:

$$\sigma_{ij}^{(n+1)}(x, t_{n+1}) = C_{ijkl} \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta \varepsilon_{kl} + f_{ij}^{(n)}(\Delta t) \quad (10)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta \varepsilon_{kl} &= G_1 \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta e_{ij} \quad (11) \\ &\quad + \frac{1}{3} \delta_{ij} G_2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta \varepsilon_{kk} \end{aligned}$$

$$f_{ij}^{(n)}(\Delta t) = \sum_{p=1}^N s_{ijp}^{(n)} e^{-a_p(\Delta t)} \quad (12)$$

$$+ \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{p=1}^N \sigma_{kkp}^{(n)} e^{-b_p(\Delta t)}$$

### رهیافت المان‌های محدود لاگرانژ الحاقی

برای معرفی مشخصات مسایل تماسی یک سامانه مکانیکی دوبعدی، یک پیکره تغییرشکل پذیر (به عنوان پیکره

هدف لغزش خواهد داشت. باید به این نکته توجه داشت که قوانین اصطکاک برای مسایل ایستایی بیان می‌شوند و جابجایی مماسی کل برای یک گره مشخص مورد نظر قرار می‌گیرد. در مسایل دینامیکی، علامت نیروی اصطکاکی به جهت حرکت (سرعت) گره وابسته است. این نوع وابستگی به حرکت (یا در مسایل شبه استاتیکی غیرخطی، وابستگی به جابجایی نموی) نیروی اصطکاکی در این فرمول‌بندی مورد نظر قرار نگرفتند. بنابراین معکوس‌سازی علامت نیروی اصطکاک در فرآیند نموی بار مجاز نمی‌باشد. مطابق قانون کلاسیک، شرایط چسبندگی و لغزشی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$|f_f^P| - \mu R_n^P < 0 \Rightarrow |u_t^P| = 0 \quad (\text{Stick}) \quad (16)$$

$$|f_f^P| - \mu R_n^P = 0 \Rightarrow |u_t^P| > 0 \quad (\text{Slip}) \quad (17)$$

که در این روابط،  $(\mu)$  ضریب اصطکاک و  $(u_t^P)$  جابجایی مماسی در راستای  $t$  می‌باشد. قانون کلاسیک برای غلبه بر دشواری‌های محاسباتی فرمول‌بندی‌های تساوی تغییراتی به یک قانون اصطکاکی الاستیک بهبود یافته است و شرایط چسبندگی و لغزشی این قانون بهبود یافته به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$|f_f^P| = K_s |u_t^P| \Rightarrow |u_t^P| \leq e \quad (\text{Stick}) \quad (18)$$

$$|f_f^P| = \mu R_n^P \Rightarrow |u_t^P| > e \quad (\text{Slip}) \quad (19)$$

که در این روابط،  $(K_s)$  که سختگی چسبندگی نامیده می‌شود، شیب بخش ابتدایی منحنی متناسب با مقدار چسبندگی  $(e)$  است. با گسسته‌سازی المان‌های محدود مسایل برابری تغییراتی تماس اصطکاکی می‌توان به معادله تعادلی زیر دست یافت [۲۱]:

$$\overline{K}U - \overline{F} + \overline{F}_c = 0 \quad (20)$$

که در اینجا  $(\overline{F}_c)$  بردار  $[2NON \times 1]$  نیروی تماس کلی می‌باشد:

$$\overline{F}_c = [\overline{f}_c^1 \overline{f}_c^2 \dots \overline{f}_c^{NON}]^T \quad (21)$$

$$\overline{f}_c^P = [R_n^P \ f_f^P]^T \quad \text{for } P=1,2,\dots, NON \quad (22)$$

که  $(\overline{f}_c^P)$  بیانگر نیروی تماس گره  $(P)$  می‌باشد و  $(\overline{f}_f^P)$  هم نیروی اصطکاکی است. می‌توان در این رابطه دریافت

سویه استفاده شود که در این شرایط، فاصله تماس نرمال فعلی بایستی بزرگتر یا برابر با صفر باشد. قانون تماس تک سویه در تماس بین دو پیکره شامل شرایط نفوذ ناپذیری، فشاری و تکمیلی می‌باشد [۲-۱]:

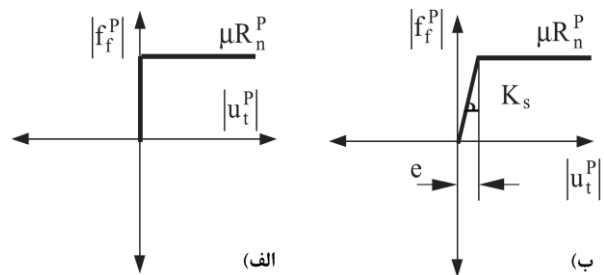
$$g_n^P \leq 0 \quad [g_n^P := -d_n^P]; \quad (15)$$

$$R_n^P \geq 0;$$

$$(R_n^P)(g_n^P) = 0 \quad (\text{for all } P \in \Gamma_c^2)$$

شرط اصلی قانون تماس تک سویه در عدم نفوذ پیکره‌ها در یکدیگر است. شرط فشاری بیانگر عدم کشش بین پیکره‌های تماسی و هدف به وسیله یکدیگر می‌باشد. شرط مکمل نشان می‌دهد که پیکره تماسی یا از هدف جدا می‌شود و یا بر روی پیکره هدف فشرده می‌شود.

اساساً دو نوع قانون اصطکاکی در مسایل مختلف مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲-۱]: قانون اصطکاک کلاسیک کولمب به صورت صلب و قانون غیرکلاسیک یا بهبود یافته به صورت غیر صلب (شکل ۲). قانون اصطکاک کلاسیک کولمب دارای کاربردهای گسترده مهندسی می‌باشد. قوانین اصطکاک غیرکلاسیک به جهت غلبه بر ناکارایی قانون کلاسیک برای بکارگیری در تئوری‌های الاستو پلاستیسیته ارایه شدند. نقص اصلی قانون کلاسیک در ناتوانی در برگیری وابستگی ضریب اصطکاک به سرعت لغزشی نسبی می‌باشد.



شکل ۲. قوانین اصطکاک در سامانه‌های تریبولوژیکی

با این وجود در بسیاری از کاربردهای مهندسی، سرعت لغزشی نسبی به حدی کم است، که وابستگی سرعت نسبی به ضریب اصطکاک قابل چشم پوشی است. در قانون کلاسیک، نیروی اصطکاکی در گره تماسی  $(P)$ ، یا با دیواره هدف چسبندگی خواهد داشت و یا در امتداد دیواره



$$\bar{\mathbf{k}}_c'^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_t \end{bmatrix} \quad (28)$$

در انتهای مرحله اول، گره تماس در نقطه تماس اولیه (D) و جابجایی ( $\bar{\mathbf{u}}'$ ) قرار دارد و نیروهای عکس‌العملی ( ${}^r\mathbf{f}_n$ ) و ( ${}^r\mathbf{f}_t$ ) در این نقطه مشخص هستند.

### مرحله دوم فرمول‌بندی

در این مرحله، هدف یافتن جابجایی گرهی ( $\bar{\mathbf{u}}''$ ) با توجه به اثرات تماس اصطکاکی می‌باشد. به عبارت دیگر در مرحله دوم چگونگی قرارگیری گره تماسی در شرایط تماس لغزشی و یا چسبندگی در سطح بار فعلی تعیین می‌شود. معادله نموی زیر را برای مرحله دوم فرمول‌بندی مطابق زیر می‌توان بیان کرد:

$$\left( \bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c''^{(i-1)} \right) \Delta \bar{\mathbf{u}}''^{(i)} - \bar{\mathbf{f}}_c' + \bar{\mathbf{r}}''^{(i-1)} + \bar{\mathbf{f}}_c''^{(i-1)} = 0 \quad (29)$$

که در آن، ( $\bar{\mathbf{r}}''^{(i-1)} = \bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} \bar{\mathbf{u}}''^{(i-1)}$ ) بردار نیروی گرهی متناسب با تنش‌های المانی است. بردار نیروی تماس مورد نیاز و ماتریس سختی تماس را برای حل معادله تعادلی فوق به سه صورت زیر می‌توان بیان نمود:

(۱)- شرایط چسبندگی برای قانون کولمب کلاسیک

$$\bar{\mathbf{f}}_c''^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n''^{(i-1)} + \theta_n) \\ {}^r\mathbf{f}_t \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_c''^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c''^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

(۲)- شرایط چسبندگی برای قانون کولمب بهبود یافته

$$\bar{\mathbf{f}}_c''^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n''^{(i-1)} + \theta_n) \\ \mathbf{K}_s \mathbf{u}_t''^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_c''^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c''^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s \end{bmatrix} \quad (33)$$

(۳)- شرایط لغزشی برای قانون کولمب کلاسیک و برای بهبود یافته

$$\bar{\mathbf{f}}_c''^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n''^{(i-1)} + \theta_n) \\ \mu \text{sgn} \mathbf{u}_t''^{(i-1)} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n''^{(i-1)} + \theta_n) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_c''^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c''^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ \mu \mathbf{K}_s \text{sgn} \mathbf{u}_t''^{(i-1)} & \mathbf{K}_s \end{bmatrix} \quad (35)$$

که در این رابطه، ( $\mathbf{K}_n > 0, \mathbf{K}_t > 0, \theta_n, \theta_t$ ) پارامترهای لاگرانژ الحاقی همبسته با قيود نرمال و مماسی (۲۳) می‌باشند. پارامترهای ( $\mathbf{K}_n$ ) و ( $\mathbf{K}_t$ ) نیز پارامترهای پناستی برای قيود مربوطه می‌باشند. ایده روش لاگرانژ الحاقی تبدیل یک مساله مقید به یک رشته مسایل غیر مقید که کمینه‌ساز کنشمنند لاگرانژ الحاقی نسبت به ( $\bar{\mathbf{u}}'$ ) برای تخمین این پارامترها می‌باشد. در این رهیافت از پارامترهایی مانند ( $\theta_t$ ) و ( $\theta_n$ ) به منظور بدست آوردن حل دقیق مساله مقید اصلی با استفاده از مقادیر محدود پارامترهای ( $\mathbf{K}_n$ ) و ( $\mathbf{K}_t$ ) می‌باشد. در صورت نفوذ یعنی در حالت ( $\mathbf{g}_n' + \theta_n \geq 0$ )، شرایط بهینگی مرتبه اول نسبت به ( $\bar{\mathbf{u}}'$ ) منجر به معادله تعادلی نموی زیر می‌شود که در مسایل غیرخطی (نظر به اثرات هندسی و یا مادی) است:

$$\left( \bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c'^{(i-1)} \right) \Delta \bar{\mathbf{u}}'^{(i)} - \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{r}}'^{(i-1)} + \bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)} = 0 \quad (25)$$

$$\Rightarrow \left( \bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c'^{(i-1)} \right) \Delta \bar{\mathbf{u}}'^{(i)} = \bar{\mathbf{f}}_{ub}^{(i-1)}$$

به طوری که

$$\bar{\mathbf{f}}_{ub}^{(i-1)} = \bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{r}}'^{(i-1)} - \bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)} \quad (26)$$

در این روابط ( $\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{r}}'^{(i-1)}$ ) ماتریس سختی سازه بسته به شرایط مادی و هندسی است و ( $\bar{\mathbf{k}}_c'^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)}$ ) ماتریس سختی تماس است. ( $\Delta \bar{\mathbf{u}}'^{(i)}$ ) نیز بیانگر بردار جابجایی نموی و ( $\bar{\mathbf{r}}'^{(i-1)} = \bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} \bar{\mathbf{u}}'^{(i-1)}$ ) بردار نیروی گرهی بسته به تنش‌های المان می‌باشند. همچنین ( $\bar{\mathbf{f}}_{ub}^{(i-1)}$ ) در این رابطه، بردار نیروی غیرتعادلی است که به صورت تکرار شونده استخراج می‌شود. با حل رابطه (۲۵) برای ( $\Delta \bar{\mathbf{u}}'^{(i)}$ )، جابجایی‌ها در (i) امین تکرار به صورت ( $\bar{\mathbf{u}}'^{(i)} = \bar{\mathbf{u}}'^{(i-1)} + \Delta \bar{\mathbf{u}}'^{(i)}$ ) به دست می‌آیند. در شرایط عدم نفوذ، نیروی تماس ( $\bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)} = 0$ ) می‌شود و در نتیجه، ماتریس سختی تماسی ( $\bar{\mathbf{k}}_c'^{(i-1)}$ ) نیز در معادله تعادلی ذکر شده برابر صفر می‌شود. در مورد شرایط نفوذ، نیروی تماسی و ماتریس سختی تماس مورد نیاز برای حل معادله تعادلی فوق به صورت زیر به دست می‌آید:

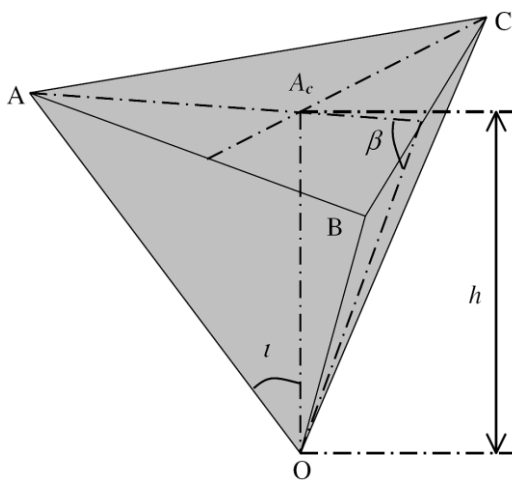
$$\bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n'^{(i-1)} + \theta_n) \\ \mathbf{K}_t (\mathbf{g}_t'^{(i-1)} + \theta_t) \end{bmatrix} \quad (27)$$



لاگرانژ الحاقی با یک فرآیند اتوماتیک برای گره‌هایی که توسط قیود تماس هنوز با دقت مطلوبی ارضا نشده‌اند. ۷- پایان حلقه الحاقی. پایان حلقه نمو بار. ۸- قرار دادن  $t = t + \Delta t$  و رفتن به مرحله دوم.

### کاربردها و نتایج عددی

مساله تماسی فرآیند فروروی یک فرورونده نانو برکویچ در یک نیم‌فضای صفحه‌ای دو بعدی متشکل از یک فیلم نازک ویسکوالاستیک پلی ونیل استات به عنوان پوشش و یک لایه زیرین الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. اطلاعات آزمایشگاهی این مطالعه با اجازه آقای پروفیسور هوانگ و استفاده از نتایج آزمایش‌های وی [۲۳] در دانشگاه ایالتی اکلاهما امریکا استخراج شده است. از فرورونده‌های برکویچ ساخته شده از الماس با نوک هرمی سه وجهی که نمای شماتیک آن در شکل ۴ نشان داده شده مورد استفاده قرار گرفته است. فرورونده‌های برکویچ همانند انواع مخروطی با زاویه نیم مخروطی  $70/3$  درجه می‌باشند.



شکل ۴. طرح کلی نوک یک نمونه فرورونده برکویچ

لایه‌ی نازک پلیمری پلی ونیل استات دارای کاربردهای فراوانی بعنوان رزین و فیلم پوششی می‌باشد. نمونه‌های پلی ونیل استات به ابعاد ۲۰ میلی‌متر طول و عرض و ۶ میلی‌متر ارتفاع انتخاب شده‌اند. سرعت فروروی فرورونده در نمونه‌ها برابر مقدار ثابت ۵ نانومتر بر ثانیه بوده است. با

در انتهای مرحله دوم نیز جابجایی گرهی ( $\bar{\mathbf{u}}''$ ) چنان تعیین می‌شود که سازه در تعادل باشد و شرایط اصطکاک و تماس ارضا شوند. مجموع جابجایی‌های مرحله اول و دوم منجر به یافتن جابجایی دقیق نهایی ( $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}' + \bar{\mathbf{u}}''$ ) می‌شود. به دلیل آنکه ساختار معادلات تعادلی مراحل اول و دوم (۲۵) و (۲۹) مشابه هستند، معادله کلی زیر را از ترکیب معادلات تعادلی مراحل اول و دوم می‌توان نوشت:

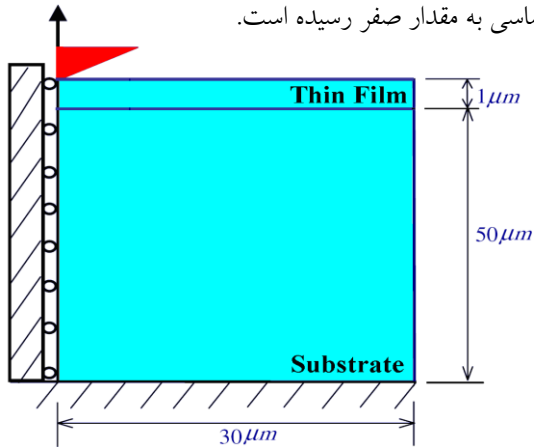
$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)})\Delta\bar{\mathbf{u}}^{(i)} - \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{r}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} &= 0 \\ \Rightarrow (\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)})\Delta\bar{\mathbf{u}}^{(i)} &= \bar{\mathbf{f}}_{ub}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (36)$$

که در این رابطه، بردار نیروهای گرهی متناسب با تنش‌های المان است؛ و  $(\bar{\mathbf{f}}_{ub}^{(i-1)})$  بردار نیروی غیرتعادلی است که نیاز به صفر گذاردن با تکرار شونده می‌باشد. با حل این معادله برای  $(\Delta\bar{\mathbf{u}}^{(i)})$ ، جابجایی‌ها در تکرار  $(i)$  ام به صورت  $(\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}' + \bar{\mathbf{u}}''$ ) به دست می‌آید.

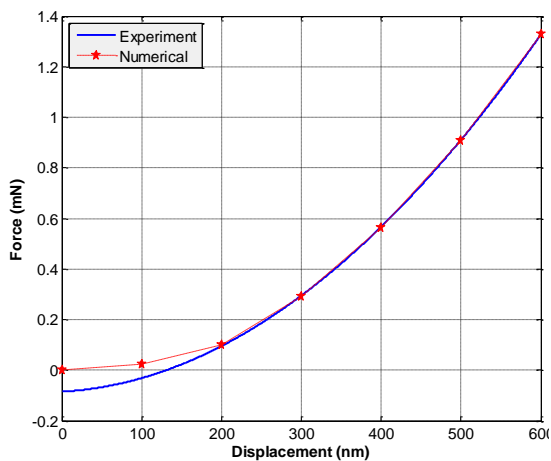
### الگوریتم عددی

در انتهای این بخش به اختصار، مراحل الگوریتم این فرمول‌بندی بهبود یافته لاگرانژ الحاقی مورد استفاده ارائه می‌گردند: ۱- قرار دادن  $t = 0$ ، ۲- آغاز حلقه نمو بار. ۳- آغاز حلقه الحاقی که با استفاده از بهنگام سازی پارامترهای روش لاگرانژ الحاقی انجام می‌شود. ۴- حل معادله نموی (۳۶) برای جابجایی به صورت تکرارشونده تا همگرایی حاصل شود. این مرحله، معادل با مراحل کمینه‌سازی کنش‌مند لاگرانژ الحاقی (۲۴) برای گره‌های عامل مرحله اول و حل معادله تعادل (۲۹) برای گره‌های مرحله دوم می‌باشد. ۵- اگر قیود تماس برای گره‌های عامل مرحله اول با دقت مطلوبی ارضا شوند، این گره‌ها به طور دقیق در نقاط تماس ابتدایی‌شان قرار دارند. سپس شرایط اصطکاکی این گره‌ها باید چک شوند. اگر قیود تماس برای گره‌های عامل مراحل اول و دوم با دقت مطلوبی ارضا شوند، حلقه الحاقی بایستی شکسته گردد و به مرحله اول بازگردد تا بار، نمو یابد. در غیر این صورت، بایستی فرآیند ادامه یابد. ۶- بهنگام سازی پارامترهای

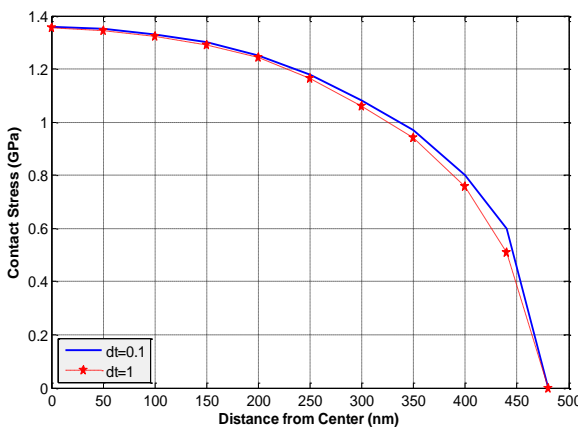
دو طول گام زمانی متفاوت ۰/۱ و ۱ ثانیه نشان داده شده است. بیشینه تنش تماسی حدود ۱/۴ گیگا پاسکالی در مرکز ناحیه فروروی مشاهده شده است. تنش تماسی با یک فرآیند کاهشی در فاصله حدود ۵۰۰ نانو متری از مرکز ناحیه مشترک تماسی به مقدار صفر رسیده است.



شکل ۶. طرح کلی مدل ماکسول تعمیم یافته



شکل ۷. مقایسه منحنی نیرو-جابجایی حاصل از فرمول‌بندی عددی با منحنی نیرو-جابجایی متوسط بدست آمده از آزمایش فروروی نانو

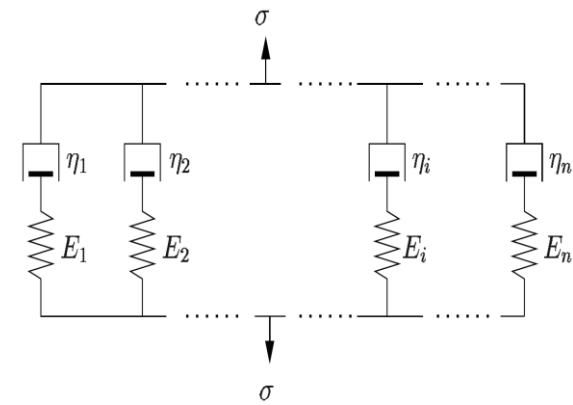


شکل ۸. نحوه توزیع تنش نرمال تماسی بر فیلم پلی‌ونیل استات از مرکز

استفاده از ضریب پواسون ثابت ۰/۳ می‌توان معادلات مربوطه را به طور مستقیم به منحنی‌های بار-جابجایی برآزش داد و سپس پارامترهای ماکسول معادلات (۶) و (۷) (شکل ۵) برای شبیه‌سازی منحنی برآزش یافته در معادلات مربوطه قرار گرفته‌اند تا خواص وارهیدگی فیلم پلیمری پلی‌ونیل استات به صورت توابع وارهیدگی برشی و حجمی زیر محاسبه شوند:

$$G_1(t) = 1.102 + 0.331 e^{-0.05t} + 0.165 e^{-0.1t} \quad (37)$$

$$G_2(t) = 2.801 + 0.448 e^{-0.05t} + 0.252 e^{-0.1t} \quad (38)$$



شکل ۵. طرح کلی مدل ماکسول تعمیم یافته

پس از به دست آمدن توابع وارهیدگی مورد نیاز حال فرآیند فروروی یک فرورونده برکوچ در لایه پلیمری پلی‌ونیل استات به صورت شکل ۶ شبیه‌سازی و با فرمول‌بندی المان‌های محدود ارایه شده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. ضریب اصطکاک برابر ۰/۳ انتخاب گردید. پس از گسسته‌سازی کامل المان‌های محدود و اجرای فرآیند حل فرمول‌بندی، یک منحنی نیرو-جابجایی غیرخطی به دست می‌آید. در شکل ۷ این منحنی نیرو-جابجایی متوسط تحت آزمایش‌های فروروی نانو با یک نرخ جابجایی ثابت نشان داده شده که با منحنی نیرو-جابجایی حاصل از حل غیرخطی فرمول‌بندی عددی مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تفاوت اساسی بین این دو منحنی به استثنای ابتدای فرآیند وجود ندارد که این تفاوت ابتدایی را هم می‌توان به دلیل شرایط آزمایش و نمونه‌ها دانست. در شکل ۸ هم نحوه توزیع تنش نرمال تماسی در میانجی بین فرورونده و سطح لایه نازک پلی‌ونیل استات در شرایط ابتدایی فروروی به ازای

## نتیجه‌گیری

در سال‌های اخیر مسایل تماسی در مکانیک جامدات محاسباتی به دلیل اهمیت غیرقابل توصیف در طراحی‌ها و تحلیل‌های مهندسی به عنوان یک سطح تحقیق فعال مطرح بوده است. پدیده تماس در اثر برهمکنش‌های تماسی بین اجزای مکانیکی رخ می‌دهد که بارهای مکانیکی هم از چنین برهمکنش‌هایی ناشی می‌شوند و بیانگر اهمیت مسایل تماسی در طراحی و تحلیل مهندسی می‌باشند. با این وجود به دلیل فرمول‌بندی‌های پیچیده پدیده‌های تماسی به ندرت در فرآیندهای طراحی مرسوم مورد نظر قرار می‌گیرند و اغلب در تحلیل‌های با دقت بالا مورد اهمیت واقع می‌شوند. هدف مطالعه حاضر، توسعه یک مدل محاسباتی نموی-انطباقی بر مبنای الگوریتمی غیرخطی و وابسته به زمان به منظور محاسبه تنش‌های شبه‌استاتیک تماسی در سامانه‌های ویسکوالاستیک بوده است. فرآیند حل لاگرانژ الحاقی بهبودیافته جدید، قابلیت غلبه بر سختی تعیین دو پارامتر پنالتهی و تعداد گام‌های بار نموی که در روش‌های مرسوم قبل توسط کاربر تعیین می‌گردیدند را دارا می‌باشد.

## مراجع

1. E. Rabinowicz, Friction and Wear of Materials, New York, Wiley, (1995).
2. T.A. Laursen, Computational Contact and Impact Mechanics, Berlin, Springer, (2002).
3. K.L. Johnson, Contact Mechanics, Cambridge, Cambridge University Press, (1985).
4. E.H. Lee, and J.R.M. Radok, *The contact problem for viscoelastic bodies*, ASME Journal of Applied Mechanics, 27(1960)438-444.
5. J.T. Oden, and N. Kikuchi, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Philadelphia, SIAM, (1988).
6. P. Alart, and A. Curnier, *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 92(1991)353-375.
7. J.C. Simo, and T.A. Laursen, *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*, Computers and Structures, 42(1992)97-116.
8. G. Zavarise, P. Wriggers, and B.A. Schrefler, *On augmented Lagrangian algorithms for thermomechanical contact problems with friction*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38(1995)2929-2949.
9. A.A. Baba, B. Radi, and J.C. Gelin, *An augmented Lagrangian treatment of the metal forming process*, Mathematical and Computer Modelling, 32(2000)1171-1179.
10. A.R. Mijar, and J.S. Arora, *An augmented Lagrangian optimization method for contact analysis problems, 1: Formulation and algorithm*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 28(2004)-99-112.
11. C.M. Chang, and W.H. Chen, *Thermo-viscoelastic contact analysis with friction by an incremental thermal relaxation procedure*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 130(1996)-151-162.
12. M. Shillor, and M. Sofonea, *A quasistatic viscoelastic contact problem with friction*, International Journal of Engineering Science, 38(2000)1517-1533.
13. M. Giri, D. Bousfield, and W.N. Unertl, *Stress intensity in viscoelastic contacts*, Tribology Letters, 9(2000)33-39.
14. A. Amassad, and C. Fabre, *Analysis of a viscoelastic unilateral contact problem involving the Coulomb friction law*, Journal of Optimization Theory and Applications, 116(2003)465-483.
15. F.F. Mahmoud, A.G. El-Shafei, and A.A. Mohamed, *An incremental adaptive procedure for viscoelastic contact problems*, ASME Journal of Tribology, 129(2007)305-313.
16. F.F. Mahmoud, A.G. El-Shafei, A.E. Al-Shorbagy, and A.A. Abdel Rahman, *A Numerical Solution for Quasistatic Viscoelastic Frictional Contact Problems*, ASME Journal of Tribology, 130(2008)011012.

۱۷. حسین، اشرفی، تحلیل عددی مسائل تماسی در اجسام ویسکوالاستیک به روش المان‌های محدود، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شیراز، (۱۳۸۷).
18. L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of Continuous Medium*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, (1969).
19. R.M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity*, New York, Academic Press, (1982).
20. J.C. Simo and T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Berlin, Springer (1998).
21. O.C. Zienkiewicz, and R.L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid Mechanics. Volume 2*, Oxford, Butterworth-Heinemann, (2000).
22. J. Jahn, *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Berlin, Springer, (2007).
23. G. Huang and H. Lu, *Measurements of Young's relaxation modulus using nanoindentation*, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 10(2006)229–243